ETAPA FINAL da SELETIVA OLÍMPICA

LigMAT NACIONAL

PROVA DO NÍVEL 3 (Ensino Médio)

LigMaT

Liga de Matemática

Valor: 300 PONTOS

BRASIL

2024

INSTRUÇÕES:

1. A Etapa Final acontece no dia 20/08 (terça-feira), às 15h00, no Horário Oficial de Brasília, com duração máxima de 1 hora e 30 minutos. A realização da prova será filmada em sala de reunião virtual, cujo *link* foi mandado para o *e-mail* principal da equipe.

2. Basta que um integrante da equipe entre na sala virtual. É necessário entrar na sala de reuniões até às 14h40.

3. Não é necessário imprimir a prova: ela pode ser visualizada no próprio computador/celular.

4. A resolução da prova deve ser feita à mão, usando papel (pautado ou em branco) e caneta ou lápis.

5. Durante a realização da prova, a câmera deve estar posicionada de modo a mostrar os três integrantes da equipe.

6. Será permitido o uso de calculadora.

7. Na resolução das questões, a equipe deverá apresentar o raciocínio usado para encontrar a resposta, não apenas a resposta.

8. Cada questão vale 100 pontos, com a seguinte divisão de pontos por item: a) 30 pontos; b) 30 pontos; c) 40 pontos.

9. Assim que terminar a prova, a equipe deverá fotografar as folhas de resolução e enviá-las até às 16h40 para o *e-mail*: ligmatbrasil@gmail.com . A mensagem deverá ser enviada por meio do *e-mail* principal da equipe e com o título "[NOME DA EQUIPE] - RESOLUÇÃO (NÍVEL 3)".

10. Verifique se as fotos tiradas têm qualidade suficiente para que se possa ler as resoluções. Caso a imagem esteja ilegível, a equipe estará sujeita a receber nota zero na respectiva questão.

11. A equipe só poderá sair da sala virtual após o envio do *e-mail* com a resolução da prova.

12. A reunião da sala virtual será gravada. As imagens não serão divulgadas, mas usadas apenas para controle interno e verificação de eventuais irregularidades.

Desejamos uma boa prova!

QUESTÕES:

1) O professor Apolônio definiu uma nova operação entre números naturais, que ele chamou de "@", de modo que *a@b* tenha as seguintes propriedades:

i) 0@0 = 1
ii) m@n = n@m
iii) m@(n+1) = m@n + m@0

a) Calcule 5@0. 6
b) Calcule 9@9. 100
c) Determine todos os pares *m* e *n* tais que *m@n* = 2024. (Lembre-se de considerar *m@n* e *n@m* soluções distintas) (0, 2023); (1, 1011); (3, 505); (7, 252); (10, 183); (21, 91); (43, 45); (22, 87) e seus simétricos .

2) Um octaedro regular maciço (que possui 8 faces), com aresta medindo 10 cm, foi encaixado em um recipiente cúbico, inicialmente cheio de água, de modo que cada vértice do octaedro tocou o centro de uma das faces do cubo, e o vértice do topo ficou no mesmo nível que a água.

a) Determine a medida da aresta do cubo. $10\sqrt{2}\ cm$
b) Determine o volume de água que restou no cubo, em cm^3. $1000\sqrt{2}\left(2-\frac{1}{3}\right)cm^3$ ou $\frac{5000\sqrt{2}}{3}\ cm^3$.
c) Suponha agora que o mesmo octaedro foi colocado em um cubo que também tem aresta medindo 10 cm, de modo que as laterais do octaedro se encaixam perfeitamente na abertura do cubo. Neste caso, uma ponta do octaedro fica para fora do cubo. Determine o volume desta ponta. $1000\left(\frac{10\sqrt{2}-14}{3}\right)cm^3$. Aproximadamente 47,38 cm^3.

3) Seis amigos têm um clube de leitura. No começo do ano, cada um deles leva um livro diferente para o clube e depois redistribuem os livros entre si através do seguinte sorteio: cada um deles sorteia o nome de um dos demais, de modo que cada um deles é sorteado exatamente uma vez (não é permitido que nenhum deles sorteie o próprio nome). Após o sorteio, a cada mês, o amigo deve emprestar o livro que está com ele ao amigo sorteado.

a) Explique por que, após um ano (12 meses), cada amigo recebe novamente o livro que tinha inicialmente. Exemplo de resposta: como no grupo de 6 pessoas, cada uma empresta o livro para outra, então as trocas se dividem em ciclos de 2, 3, 4 ou 6 pessoas (o ciclo de 5 é impossível). Como 12 é múltiplo comum de todos os ciclos possíveis, qualquer que tenha sido o sorteio, em 12 meses todos os ciclos se completam.

b) Em quantos sorteios diferentes cada amigo tem novamente o próprio livro em 2 meses? 15. (Sejam A, B, C, D, E e F. Se A sorteou B, é preciso que B tenha sorteado A, e assim por diante. A tem 5 possibilidades de sorteio. Para cada possibilidade, um dos sorteados tem apenas 3 possibilidades, e isso determina o sorteio de todos os demais).

c) Em quantos sorteios diferentes cada amigo tem novamente o próprio livro em 6 meses? 175. (Soma de todos os sorteios de 2-ciclo (item b) mais 3-ciclo mais 6-ciclo. Para 6-ciclo, o resultado é o total de permutações circulares de 6, totalizando 5! = 120. Para os 3-ciclos, precisamos dividir os amigos em dois subconjuntos de 3, e o total de possibilidades é

$$\frac{\binom{6}{3} * \binom{3}{3}}{2!} = 10$$

Assim, há 10 divisões possíveis. Como em cada subconjunto de 3 há 2 possibilidades de ciclos, temos um total de 10*2*2=40 3-ciclos. Por fim, somando todos os casos temos: 15 + 40 + 120 = 175 possibilidades).