1ª Rodada da SELETIVA OLÍMPICA
LigMAT NACIONAL

PROVA DO NÍVEL 3 (ENSINO MÉDIO)

Valor: 200 PONTOS

BRASIL
2024

Realização
INSTITUTO PHILOTIMIA
Apoio
UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Associação Olimpíada Brasileira de Matemática
stone

INSTRUÇÕES:

Antes de começar a prova, leia com muita atenção as orientações abaixo:

1 - A prova tem duração máxima de 1h (uma hora). Caso a equipe não finalize a prova neste limite de tempo, ela será interrompida e enviada automaticamente à Comissão Organizadora da LigMAT, para que apenas as questões respondidas sejam avaliadas.

2 - Vocês terão apenas 1 (uma) tentativa. Depois de terminar a prova, não é possível retornar a ela e fazer alterações.

3 - O questionário de prova só estará aberto no dia 20/06/2024, a partir das 7h00, encerrando-se automaticamente às 23h59.

4 - A prova só poderá ser respondida pelos 3 alunos que compõem sua equipe. Não é permitido nenhum auxílio de fora da equipe, sob pena de desclassificação da competição e banimento das competições futuras.

5 - É permitido o uso de calculadora.

6 - A equipe deverá responder a um único questionário. Caso a equipe inicie mais de um questionário, estará sujeita a penalidades.

7 - A prova é composta de 12 (doze) questões, todas de múltipla escolha e com apenas 1 (uma) alternativa correta.

8 - A pontuação máxima é de 200 (duzentos) pontos.

9 - A pontuação obtida pela equipe será enviada por e-mail assim que finalizado o questionário de prova.

10 - A prova da 3ª Rodada da Seletiva Olímpica será realizada no dia 13/08. Todas as equipes inscritas podem (e devem) fazer a prova da 3ª Rodada, independentemente do desempenho na 1ª e 2ª Rodadas.

Desejamos uma boa prova!

QUESTÕES:

1. (16 PONTOS) Um poliedro tem como uma de suas faces um octógono regular. Qual é o mínimo de arestas que esse poliedro pode ter?
(A) 10
(B) 12
(C) 16
(D) 18
(E) 24

2. (16 PONTOS) Sejam x e y números reais positivos menores que 1. Considere as seguintes afirmações:
I) $x + y < \sqrt{x} + \sqrt{y}$
II) $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$
III) $x^2 + y^2 < 1$

Quais afirmações podemos garantir que estão corretas?

(A) I, apenas.
(B) I e II, apenas.
(C) I e III, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

3. (16 PONTOS) Na última avaliação em uma turma de 40 alunos, a média das 10 notas mais altas foi 9,2, enquanto a média das 10 notas mais baixas foi 4,2. Quais são, respectivamente, os valores mínimo e máximo possíveis para a média da turma toda?
(A) 5,2 e 8,2.
(B) 5,45 e 7,95.
(C) 5,55 e 7,85.
(D) 5,65 e 7,75.
(E) 5,8 e 7,6.

4. (16 PONTOS) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função *alteradora de dígitos* tal que, para cada número natural *n*, $f(n)$ altera cada um dos seus dígitos *d* diferentes de 0 segundo a tabela abaixo:

d	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(d)}$	**3**	**9**	**6**	**2**	**7**	**1**	**4**	**8**	**5**

Por exemplo, $f(43801) = 26803$. Qual é o menor valor de *n* para o qual $\underbrace{f\left(f\left(\dots\left(f(n)\right)\right)\right)}_{n\ vezes} = n$ para todo número natural *n*?

(A) 5
(B) 10
(C) 12
(D) 15
(E) 20

5. (16 PONTOS) Em um evento internacional, há 100 participantes, entre brasileiros e estrangeiros. Sabe-se que, entre os brasileiros, 5/7 são homens e, entre os estrangeiros, 3/11 são homens. Quantas mulheres há no evento?
(A) 48
(B) 49
(C) 50
(D) 51
(E) 52

6. (16 PONTOS) Um dado de 6 faces, enumeradas de 1 a 6, é viciado de modo que a probabilidade de cada face cair para cima é proporcional ao seu número. Em um lançamento deste dado, qual é a probabilidade de o número para cima ser ímpar?
(A) 5/9
(B) 3/7
(C) 4/9
(D) 1/2
(E) 4/7

7. (16 PONTOS) Considere todos os valores de p para os quais a equação de segundo grau abaixo tem raízes inteiras positivas:

$$x^2 - px + 2024 = 0$$

Qual é a soma de todos os valores de p?

(A) 3810
(B) 4048
(C) 4202
(D) 4320
(E) 5050

8. (16 PONTOS) Para cada número natural de 1 a 10, Camila efetuou a soma de seus dez primeiros múltiplos positivos, e em seguida realizou a multiplicação de todos os resultados obtidos, obtendo

$$S = (1 + 2 + \cdots + 10) \cdot (2 + 4 + \cdots + 20) \cdot \cdots \cdot (10 + 20 + \cdots + 100)$$

O número S (o resultado da conta) termina com quantos zeros? Dito de modo mais exato, S termina com uma sequência ininterrupta de zeros: até quantos zeros tem essa sequência?

(A) 8
(B) 9
(C) 10
(D) 11
(E) 12

9. (18 PONTOS) O triângulo ABC é retângulo em C, e é dividido em dois triângulos retângulos pela altura relativa a C. Os raios das duas circunferências inscritas são 24 cm e 45 cm. Qual é o perímetro do triângulo ABC?

(A) 630 cm
(B) 640 cm
(C) 680 cm
(D) 690 cm
(E) 720 cm

10. (18 PONTOS) Ao todo, quantas raízes reais a equação abaixo tem?

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4$$

(A) Nenhuma.
(B) Uma.
(C) Duas.
(D) Quatro.
(E) Infinitas.

11. (18 PONTOS) Horácio decide manipular um número em um quadro negro com duas operações: a operação A, que consiste em tomar o dobro do número; a operação B, que consiste em elevá-lo ao quadrado. A cada operação que efetua, Horácio apaga o número anterior, escreve o novo número, e anota a letra da operação efetuada. Seja 2 o número inicial no quadro. Com quantas sequências de operações **distintas** Horácio pode chegar a 2^{24} ?

Obs: Considere $A(2) = 2 \cdot 2 = 4$ e $B(2) = 2^2 = 4$ como operações distintas.

(A) 94
(B) 96
(C) 100
(D) 102
(E) 106

12. (18 PONTOS) Um trapézio *ABCD* tem lados paralelos *AB* e *CD*, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 78°, enquanto o ângulo $A\hat{B}C$ mede $64°$. Marca-se um ponto *P* sobre o lado *CD* tal que $AD + DP = BC + CP = AB$. Quanto mede a soma dos ângulos $P\hat{A}D + P\hat{B}C$?

(A) 30°
(B) 31°
(C) 32°
(D) 33°
(E) 34°